

# Zahlensysteme

Netzwerke und Embedded Systems

1. Jahrgang

Wolfgang Neff

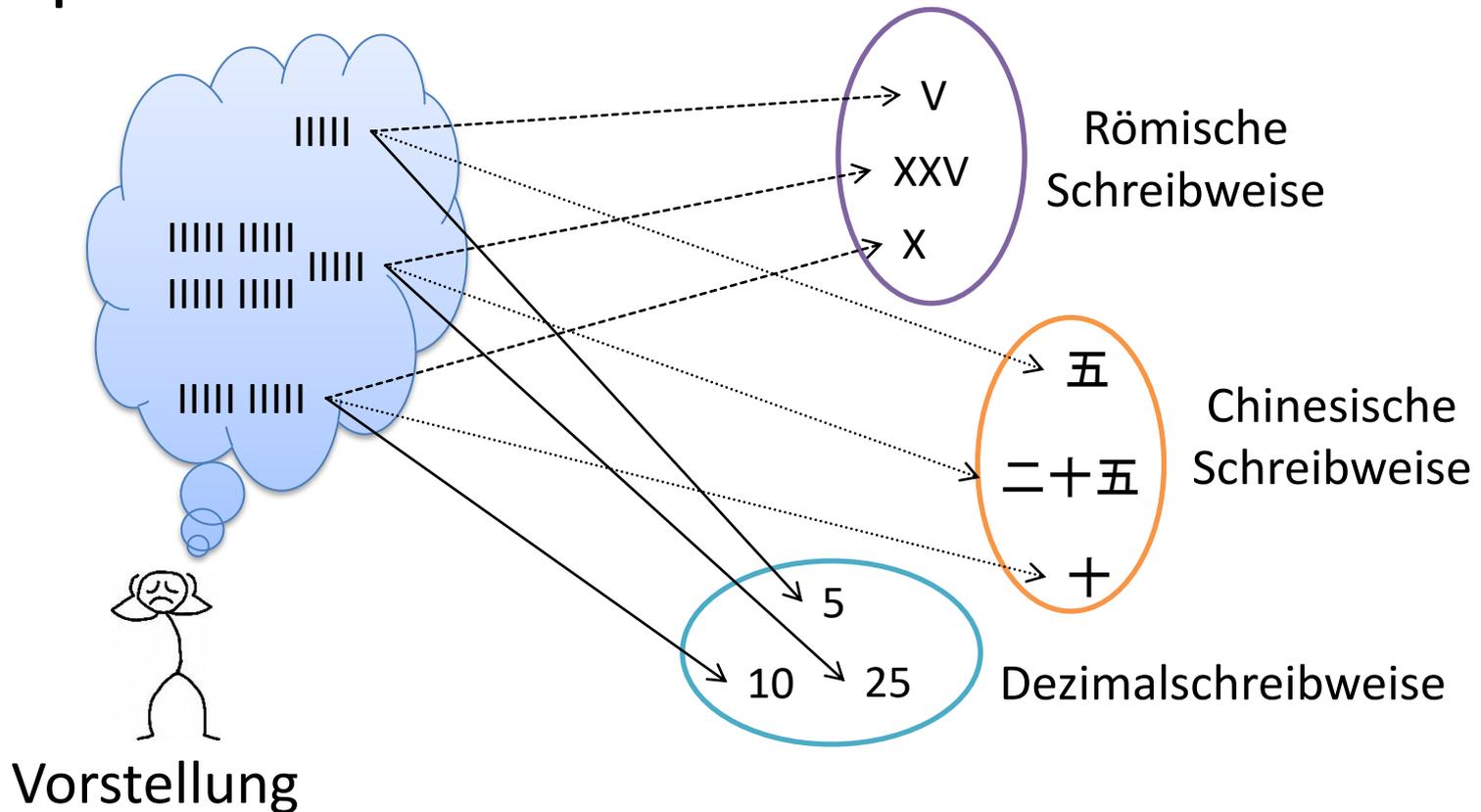
# Zahlensysteme (1)

- Zahlen sind abstrakt
  - Sie existieren nur in unserer Vorstellung
  - Sie müssen repräsentiert werden



# Zahlensysteme (2)

- Repräsentation von Zahlen



# Dezimalsystem (1)

- Unser Zahlensystem besitzt 10 Ziffern
  - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Der Wert einer Ziffer hängt von der Stelle ab

| Tausender | Hunderter | Zehner | Einer |
|-----------|-----------|--------|-------|
| 2         | 0         | 1      | 2     |

- Der Wert der Stelle kann berechnet werden

| Tausender | Hunderter | Zehner | Einer  |
|-----------|-----------|--------|--------|
| $10^3$    | $10^2$    | $10^1$ | $10^0$ |

# Dezimalsystem (2)

- Welchen Wert besitzt eine Ziffernfolge?
  - Stellen von hinten mit Null beginnen durchzählen
  - Die entsprechende Zehnerpotenz bilden
  - Mit der Ziffer der Stelle multiplizieren
  - Alles zusammenzählen

Zählrichtung



| Stelle | 3      | 2      | 1      | 0      |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| Wert   | $10^3$ | $10^2$ | $10^1$ | $10^0$ |
|        | 1000   | 100    | 10     | 1      |
| Ziffer | 2      | 0      | 1      | 2      |

# Dezimalsystem (3)

- Welchen Wert hat die Ziffernfolge 2012?
  - $2012_{\text{dez}} = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$
  - $2012_{\text{dez}} = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1$
  - $2012_{\text{dez}} = 2012$
- Wir sind mit dem Dezimalsystem vertraut
- Wir kennen den Wert auch ohne Berechnung
- $2012_{\text{dez}} \rightarrow$  Zahl im Dezimalsystem



# Dezimalsystem (4)

- Aus welchen Ziffern besteht eine Zahl?
  - Fortlaufend mit Zehn dividieren
  - Den Rest der Division notieren
  - Aufhören, wenn Null erreicht ist
  - Die Reste von unten nach oben ablesen

# Dezimalsystem (5)

- Aus welchen Ziffer besteht die Zahl 2012?

|   |                |   |     |        |   |                   |
|---|----------------|---|-----|--------|---|-------------------|
| – | $2012 \div 10$ | = | 201 | Rest 2 |  | Lese-<br>richtung |
| – | $201 \div 10$  | = | 20  | Rest 1 |   |                   |
| – | $20 \div 10$   | = | 2   | Rest 0 |   |                   |
| – | $2 \div 10$    | = | 0   | Rest 2 |   |                   |

Rechnung endet hier

- Das Ergebnis lautet:  $2012_{\text{dez}}$
- Wir kennen das Ergebnis ohne Berechnung
  - Das Dezimalsystem ist uns vertraut

# Dezimalsystem (6)

- Gegeben sei eine feste Zahl von Ziffern
  - Wie viele Zahlen gibt es insgesamt?
    - Zehn hoch der Anzahl der Ziffern
  - Welches ist die größte Zahl?
    - Bei allen Stellen die höchste Ziffer schreiben
    - Anzahl der Stellen minus eins
- Gegeben seien vier Ziffern
  - Anzahl der Zahlen:  $10^4 = 10000$  (0 ... 9999)
  - Größte Zahl: 9999 oder  $10000-1 = 9999$

An alle Stellen die höchste Ziffer

Anzahl der Zahlen minus eins

# Hexadezimalsystem (1)

- Das Hexadezimalsystem besitzt 16 Ziffern  
– 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F
- Die Buchstaben stehen für die Werte

| A  | B  | C  | D  | E  | F  |
|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

- Der Wert der Stelle kann berechnet werden

| Stelle | 3      | 2      | 1      | 0      |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| Wert   | $16^3$ | $16^2$ | $16^1$ | $16^0$ |

# Hexadezimalsystem (2)

- Welchen Wert hat die Ziffernfolge  $2012_{\text{hex}}$ ?
  - $2012_{\text{hex}} = 2 \cdot 16^3 + 0 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0$
  - $2012_{\text{hex}} = 2 \cdot 4096 + 0 \cdot 256 + 1 \cdot 16 + 2 \cdot 1$
  - $2012_{\text{hex}} = 8210$
- Das Hexadezimalsystem ist uns fremd
- Den Wert müssen wir tatsächlich berechnen
- $2012_{\text{hex}} \rightarrow$  Zahl im Hexadezimalsystem



# Hexadezimalsystem (3)

- Aus welchen Ziffern besteht die Zahl 2012?

- $2012 \div 16 = 125$  Rest 12 (C)

- $125 \div 16 = 7$  Rest 13 (D)

- $7 \div 16 = 0$  Rest 7



Lese-  
richtung

Rechnung endet hier

- Das Ergebnis lautet:  $7DC_{\text{hex}}$
- Die Ziffern mussten wir berechnen
  - Das Hexadezimalsystem ist uns fremd

# Hexadezimalsystem (4)

- Gegeben seien vier Hexadezimalziffern
  - Wie viele Zahlen gibt es insgesamt?
    - $16^4 = 65536$
  - Welches ist die größte Zahl?
    - $FFFF_{\text{hex}}$  
    - 65535 

# Hexadezimalsystem (5)

- Zusammenfassung

- Von der Schreibweise zum Wert

- $7DC_{\text{hex}} \rightarrow 2012$  Hexadezimale Schreibweise  $\rightarrow$  dezimaler Wert
    - Multiplikation mit dem Stellenwert

- Vom Wert zur Schreibweise

- $2012 \rightarrow 7DC_{\text{hex}}$  Dezimaler Wert  $\rightarrow$  hexadezimale Schreibweise
    - Division mit der Basis

# Binärsystem (1)

- Das Binärsystem besitzt 2 Ziffern
  - 0, 1
- Welchen Wert hat die Ziffernfolge  $1011_{\text{bin}}$ ?
  - $1011_{\text{bin}} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
  - $1011_{\text{bin}} = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$
  - $1011_{\text{bin}} = 11$

# Binärsystem (2)

- Aus welchen Ziffern besteht die Zahl 11?

|   |             |   |   |        |   |                   |
|---|-------------|---|---|--------|---|-------------------|
| – | $11 \div 2$ | = | 5 | Rest 1 |  | Lese-<br>richtung |
| – | $5 \div 2$  | = | 2 | Rest 1 |   |                   |
| – | $2 \div 2$  | = | 1 | Rest 0 |   |                   |
| – | $1 \div 2$  | = | 0 | Rest 1 |   |                   |

Rechnung endet hier

- Das Ergebnis lautet:  $1011_{\text{bin}}$

# Binärsystem (3)

- Gegeben seien vier Binärziffern
  - Wie viele Zahlen gibt es insgesamt?
    - $2^4 = 16$
  - Welches ist die größte Zahl?
    - $1111_{\text{bin}}$  
    - 15 
  - Übliche Bezeichnungen
    - Eine Binärziffer = 1 Bit
    - Acht Binärziffern = 1 Byte

# Zahlensysteme (3)

- Zahlensysteme sind universell
  - Sie funktionieren mit jeder Anzahl von Ziffern
- Beispiele
  - Oktalsystem
    - 8 Ziffern
    - Alte Schreibweise für Datenbytes
  - Base64
    - 64 Ziffern
    - Austausch von Binärdaten mit E-Mail

# Zahlensysteme (4)

- Zahlensysteme sind aufwändig
  - Man muss viel rechnen
- Manchmal geht es auch einfacher
  - Binär → Dezimal
  - Dezimal → Binär
  - Binär → Hexadezimal
  - Hexadezimal → Binär

# Schnellumwandlung (1)

- Binär zu Dezimal
  - Schreibe ... 8 4 2 1 über die Stellen
    - Starte von rechts mit einer Eins
    - Gehe schrittweise nach links und verdopple
  - Addiere alle Stellenwerte mit einer Eins

# Schnellumwandlung (2)

- Welchen Wert hat  $10110011_{\text{bin}}$ ?

| 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
|-----|----|----|----|---|---|---|---|
| 1   | 0  | 1  | 1  | 0 | 0 | 1 | 1 |

$$- 128 + 32 + 16 + 2 + 1 = 179$$

- Der Wert von  $10110011_{\text{bin}}$  ist 179

# Schnellumwandlung (3)

- Dezimal zu Binär
  - Verdopple Eins bis sie größer ist als der Wert
  - Versuche die Hälfte davon zu subtrahieren
    - Notiere eine 1 falls dies möglich ist
    - Notiere eine 0 falls dies nicht möglich ist
  - Fahre fort bis die Eins wieder erreicht ist
  - Die notierten Ziffern sind die Binärzahl

# Schnellumwandlung (4)

- Aus welchen Ziffern besteht 179?
  - Verdopple Eins bis sie größer ist als der Wert
    - 1 2 4 8 16 32 64 128 256.
  - Versuche die Hälfte davon zu subtrahieren

|     |    |    |    |   |   |   |   |
|-----|----|----|----|---|---|---|---|
| 179 | 51 | 51 | 19 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
| 1   | 0  | 1  | 1  | 0 | 0 | 1 | 1 |

- 179 ist  $10110011_{\text{bin}}$

# Schnellumwandlung (5)

- Binär  $\leftrightarrow$  Hexadezimal
  - Erstelle eine Tabelle
    - Links stehen die Hexadezimalziffern
    - Rechts die entsprechende vierstellige Binärzahl

|          |      |          |      |          |      |          |      |
|----------|------|----------|------|----------|------|----------|------|
| <b>0</b> | 0000 | <b>4</b> | 0100 | <b>8</b> | 1000 | <b>C</b> | 1100 |
| <b>1</b> | 0001 | <b>5</b> | 0101 | <b>9</b> | 1001 | <b>D</b> | 1101 |
| <b>2</b> | 0010 | <b>6</b> | 0110 | <b>A</b> | 1010 | <b>E</b> | 1110 |
| <b>3</b> | 0011 | <b>7</b> | 0111 | <b>B</b> | 1011 | <b>F</b> | 1111 |

# Schnellumwandlung (6)

- Hexadezimal  $\rightarrow$  Binär
  - Ziffer für Ziffer umwandeln
  - Bitmuster aus der Tabelle entnehmen
- Welcher Binärzahl entspricht  $A7_{\text{hex}}$  und  $BC_{\text{hex}}$ ?
  - $A7_{\text{hex}} \rightarrow 1010\ 0111_{\text{bin}}$
  - $BC_{\text{hex}} \rightarrow 1011\ 1100_{\text{bin}}$

# Schnellumwandlung (7)

- Binär  $\rightarrow$  Hexadezimal
  - Bilde von rechts beginnend Vierergruppen
  - Ergänze links Nullen, falls nötig
  - Schlage jede Bitgruppe in der Tabelle nach
- Was entspricht  $110100_{\text{bin}}$  und  $10111100_{\text{bin}}$ ?
  - $110100_{\text{bin}} \rightarrow 0011\ 0100_{\text{bin}} \rightarrow 34_{\text{hex}}$
  - $10111100_{\text{bin}} \rightarrow \underbrace{1011}_{\text{2. Gruppe}} \underbrace{1100}_{\text{1. Gruppe}}_{\text{bin}} \rightarrow \text{BC}_{\text{hex}}$

# Zahlensysteme (5)

- Dezimal und binär passen nicht gut zusammen
  - Zehn ist keine Zweierpotenz
- Hexadezimal und binär passen gut zusammen
  - Sechzehn ist eine Zweierpotenz ( $2^4$ )
  - Vier Bit ergeben genau eine Hexadezimalziffer
  - Eine Hexadezimalziffer ergeben genau vier Bit
- Bitfolgen schreibt man meist hexadezimal
  - Als Bitfolgen wären sie viel zu lang

# Zahlensysteme (6)

- Anwendung von Hexadezimalzahlen
  - Hex-Editor
    - Ein Hex-Editor stellt den Inhalt einer Datei als Folge von Hexadezimalzahlen dar
    - Der Inhalt der Datei kann geändert werden indem man die Hexadezimalzahlen ändert

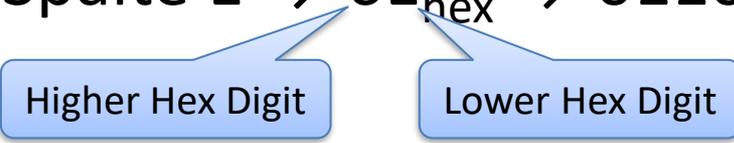
```
89 50 4E 47 0D 0A 1A 0A 00 00 00 0D 49 48 44 52 %PNG....IHDR
00 00 00 01 00 00 00 01 08 02 00 00 00 90 77 53 .....wS
DE 00 00 00 0E 49 44 41 54 78 DA 62 F8 CF CO 00 P....IDATxÚbøÏÀ.
10 60 00 03 01 01 00 66 FD 9F 24 00 00 00 00 49 .`....fýÿ$....I
45 4E 44 AE 42 60 82 END@B` ,
```

# Zeichenkodierung (1)

- ASCII (American Standard Code for Information Interchange)

| ASCII            |   | Lower Hex Digit |     |     |     |     |     |     |     |     |    |     |     |    |    |    |     |
|------------------|---|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|----|----|----|-----|
|                  |   | 0               | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9  | A   | B   | C  | D  | E  | F   |
| Higher Hex Digit | 0 | NUL             | SOH | STX | ETX | EOF | ENQ | ACK | BEL | BS  | HT | LF  | VT  | FF | CR | SO | SI  |
|                  | 1 | DLE             | DC1 | DC2 | DC3 | DC4 | NAK | SYN | ETB | CAN | EM | SUB | ESC | FS | GS | RS | US  |
|                  | 2 |                 | !   | "   | #   | \$  | %   | &   | '   | (   | )  | *   | +   | ,  | -  | .  | /   |
|                  | 3 | 0               | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9  | :   | ;   | <  | =  | >  | ?   |
|                  | 4 | @               | A   | B   | C   | D   | E   | F   | G   | H   | I  | J   | K   | L  | M  | N  | O   |
|                  | 5 | P               | Q   | R   | S   | T   | U   | V   | W   | X   | Y  | Z   | [   | \  | ]  | ^  | _   |
|                  | 6 | `               | a   | b   | c   | d   | e   | f   | g   | h   | i  | j   | k   | l  | m  | n  | o   |
|                  | 7 | p               | q   | r   | s   | t   | u   | v   | w   | x   | y  | z   | {   |    | }  | ~  | DEL |

# Zeichenkodierung (2)

- Den Zeichen werden Bitmuster zugeordnet
  - Die Bitmuster werden hexadezimal angegeben
  - Der Code kann aus der Tabelle gelesen werden
  - Welchen Code besitzen \$ und n?
    - \$ → Zeile 2, Spalte 4 →  $24_{\text{hex}} \rightarrow 0010\ 0100_{\text{bin}}$
    - n → Zeile 6, Spalte E →  $6E_{\text{hex}} \rightarrow 0110\ 1110_{\text{bin}}$
- 
- VORSICHT: High und Low nicht vertauschen!