

Minimierung

Netzwerke und Embedded Systems

1. Jahrgang

Wolfgang Neff

Minimierung (1)

- Wahrheitsfunktionen sind oft sehr groß
- Durch Minimierung werden sie vereinfacht
- Es gibt mehrere Methoden
 - KV-Diagramm (Karnaugh-Veitch, ['ka:ʏno:]-[vi:tʃ])
 - Sehr anschaulich
 - Funktionier nur bis vier Variablen gut
 - Quine-McCluskey-Verfahren
 - Für beliebige Anzahl von Variablen geeignet
 - Komplex und wenig anschaulich

Minimierung (2)

- Vorgehensweise
 - Bestimmung der Wahrheitstabelle
 - Erstellen des KV-Diagramm
 - Einfüllen der Karnaugh-Terme
 - Suchen von Blöcken mit der Größe von Zweierpotenzen (2er-, 4er-, 8er-, ...-Blöcke)
 - Steichen der Variablen, die in zwei Bereichen liegen

Wahrheitstabellen (1)

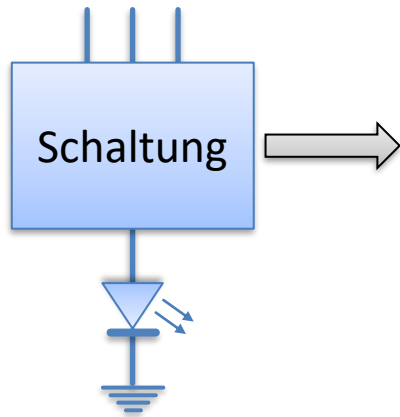
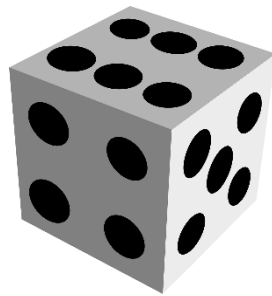
- Bestimmung der Wahrheitstabelle
 - Analysiere das Problem
 - Bestimme die Anzahl der möglichen Ereignisse
 - Bestimme die beste Zweierpotenz dafür
 - Erzeugt die entsprechende Wahrheitstabelle
 - Codiere die Ereignisse
 - Bestimme das Ergebnis für jede Zeile der Tabelle
 - Meist gibt es mehrere Möglichkeiten

Wahrheitstabellen (2)

- Beispiel: Gerade Augenzahl gewürfelt?
 - Ein Würfel hat sechs Seiten
 - Es gibt 6 mögliche Ereignisse
 - 3 ist die hierfür geeignete Zweierpotenz
 - Es werden 3 Parameter benötigt ($2^2 = 4 \leq 6 \leq 2^3 = 8$)
 - Die Schaltung hat 3 Eingänge
 - Codierung der Ereignisse
 - 1 Auge \rightarrow 1, 2 Augen \rightarrow 2 etc.
 - Eine 1 zeigt eine gerade Augenzahl an

Wahrheitstabellen (3)

- Beispiel: Sechser? (Fortsetzung)



| n | a | b | c | $\varphi(a,b,c)$ | Augen |
|---|---|---|---|------------------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | X | - |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | X | - |

KV-Diagramme (1)

- Zwei Variablen

| | | | |
|--|------------------------|-------------------|---|
| | | a | |
| | $\neg a \wedge \neg b$ | $a \wedge \neg b$ | |
| | $\neg a \wedge b$ | $a \wedge b$ | b |

- Drei Variablen

| | | | | | |
|--|--------------------------------------|---------------------------------|----------------------------|---------------------------------|---|
| | | | a | | |
| | $\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c$ | $\neg a \wedge \neg b \wedge c$ | $a \wedge \neg b \wedge c$ | $a \wedge \neg b \wedge \neg c$ | |
| | $\neg a \wedge b \wedge \neg c$ | $\neg a \wedge b \wedge c$ | $a \wedge b \wedge c$ | $a \wedge b \wedge \neg c$ | b |
| | | c | | | |

KV-Diagramme (2)

- Vier Variablen

| | | | | |
|---|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| | | | a | |
| | $\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d$ | $\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d$ | $a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d$ | $a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d$ |
| d | $\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge d$ | $\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge d$ | $a \wedge \neg b \wedge c \wedge d$ | $a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge d$ |
| | $\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge d$ | $\neg a \wedge b \wedge c \wedge d$ | $a \wedge b \wedge c \wedge d$ | $a \wedge b \wedge \neg c \wedge d$ |
| | $\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d$ | $\neg a \wedge b \wedge c \wedge \neg d$ | $a \wedge b \wedge c \wedge \neg d$ | $a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d$ |
| | | c | | b |

KV-Terme (1)

- Minterme
 - Zeilen mit einer 1 als Ergebnis
 - Alle Variablen werden durch AND verbunden
 - Jede Variable, die einen Wert von 0 hat, wird negiert
 - Markiere die Minterme im Diagramm mit einer 1
- Don't-Care-Terme
 - Zeilen mit einem X als Ergebnis
 - Markiere diese Terme im Diagramm mit einem X

KV-Terme (2)

- Bestimmung der Terme
 - Beispiel: Sechser?

| n | a | b | c | $\varphi(a,b,c)$ | |
|---|---|---|---|------------------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | X | x_0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | m_0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 | m_1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | m_2 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | X | x_1 |

- Minterme

- $m_0 = \neg a \wedge b \wedge \neg c$
- $m_1 = a \wedge \neg b \wedge \neg c$
- $m_2 = a \wedge b \wedge \neg c$

- Don't-Care-Terme

- $x_0 = \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c$
- $x_1 = a \wedge b \wedge c$

KV-Terme (3)

- Eintragung der Terme

- Minterme

- $m_0 = \neg a \wedge b \wedge \neg c$

- $m_1 = a \wedge \neg b \wedge \neg c$

- $m_2 = a \wedge b \wedge \neg c$

- Don't-Care-Terme

- $x_0 = \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c$

- $x_1 = a \wedge b \wedge c$

| | | | |
|---|--|---|---|
| | | a | |
| X | | | 1 |
| 1 | | X | 1 |
| | | c | b |

Minimierung (3)

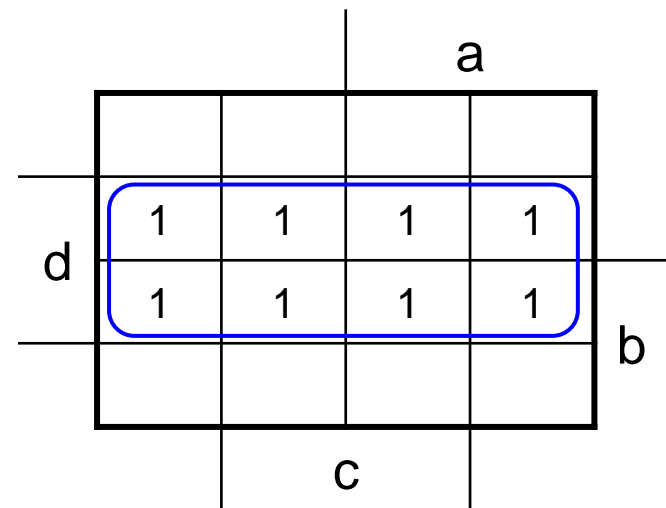
- Bestimmung der Blöcke

- Minterme

- $(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge d)$, $(\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge d)$,
 - $(a \wedge \neg b \wedge c \wedge d)$, $(a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge d)$,
 - $(\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge d)$, $(\neg a \wedge b \wedge c \wedge d)$,
 - $(a \wedge b \wedge c \wedge d)$, $(a \wedge b \wedge \neg c \wedge d)$

- Minimierte Funktion

- $\varphi(a,b,c,d) = d$



Minimierung (4)

- Bestimmung der Blöcke (Fortsetzung)

- Minterme

- $(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d)$, $(a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d)$,

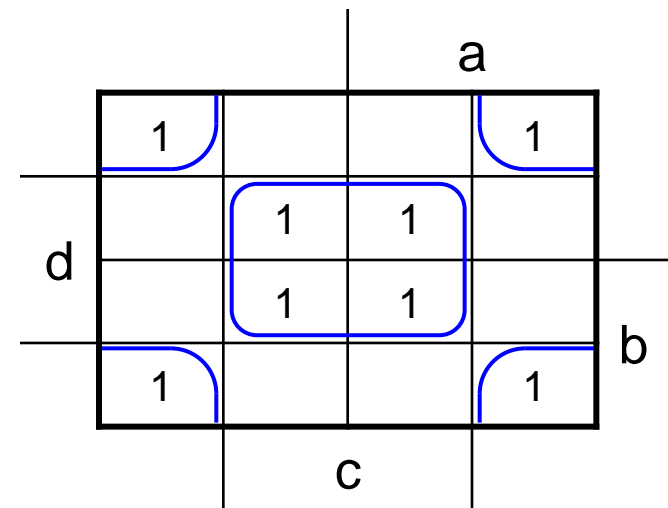
- $(\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge d)$, $(a \wedge \neg b \wedge c \wedge d)$,

- $(\neg a \wedge b \wedge c \wedge d)$, $(a \wedge b \wedge c \wedge d)$,

- $(\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d)$, $(a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d)$

- Minimierte Funktion

- $\varphi(a,b,c,d) = (c \wedge d) \vee (\neg c \wedge \neg d)$



Minimierung (5)

- Bestimmung der Blöcke (Fortsetzung)

- Minterme

- $(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d)$, $(\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d)$,

- $(a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d)$, $(a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d)$,

- $(\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge d)$, $(a \wedge \neg b \wedge c \wedge d)$,

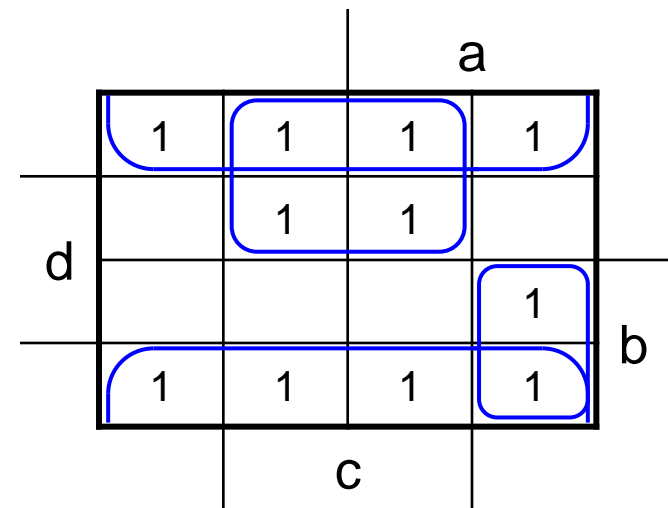
- $(a \wedge b \wedge \neg c \wedge d)$, $(\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d)$,

- $(\neg a \wedge b \wedge c \wedge \neg d)$, $(a \wedge b \wedge c \wedge \neg d)$,

- $(a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d)$

- Minimierte Funktion

- $$\varphi(a,b,c,d) = \neg d \vee (\neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$$



Minimierung (6)

- Bestimmung der Blöcke (Fortsetzung)
 - Don't-Care-Terme
 - Sind bei geschickter Wahl äußerst hilfreich
 - Sie erlauben, die Minimierung zu optimieren

