

Zahlensysteme

Digitaltechnik

Wolfgang Neff

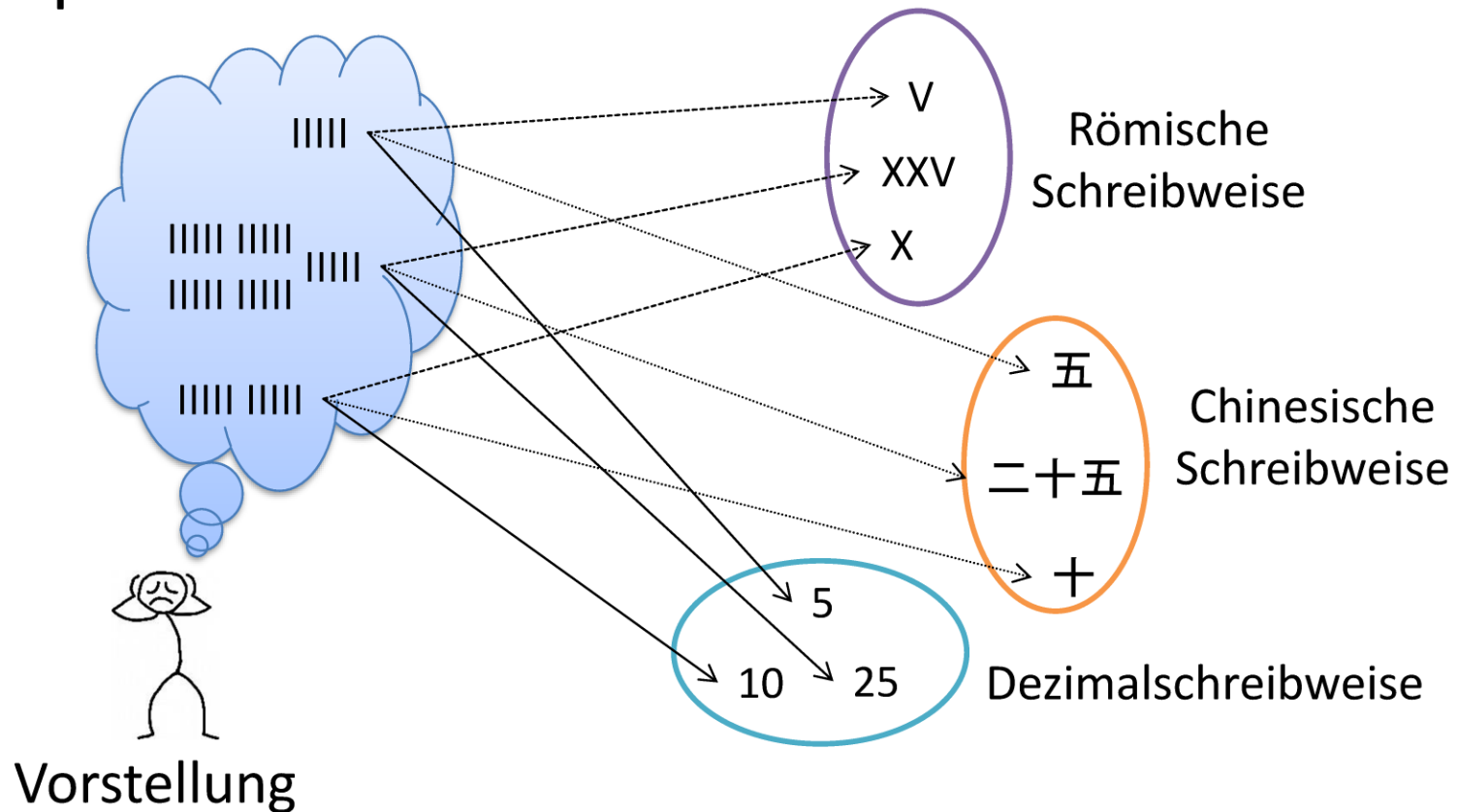
Zahlensysteme (1)

- Zahlen sind abstrakt
 - Sie existieren nur in unserer Vorstellung
 - Sie müssen repräsentiert werden



Zahlensysteme (2)

- Repräsentation von Zahlen



Dezimalsystem (1)

- Unser Zahlensystem besitzt 10 Ziffern
 - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Der Wert einer Ziffer hängt von der Stelle ab

Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
2	0	1	2

- Der Wert der Stelle kann berechnet werden

Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
10^3	10^2	10^1	10^0

Dezimalsystem (2)

- Welchen Wert besitzt eine Ziffernfolge?
 - Stellen von hinten mit Null beginnen durchzählen
 - Die entsprechende Zehnerpotenz bilden
 - Mit der Ziffer der Stelle multiplizieren
 - Alles zusammenzählen



Stelle	3	2	1	0
Wert	10^3	10^2	10^1	10^0
	1000	100	10	1
Ziffer	2	0	1	2

Dezimalsystem (3)

- Welchen Wert hat die Ziffernfolge 2012?
 - $2012_{\text{dez}} = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$
 - $2012_{\text{dez}} = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1$
 - $2012_{\text{dez}} = 2012$
- Wir sind mit dem Dezimalsystem vertraut
- Wir kennen den Wert auch ohne Berechnung
- $2012_{\text{dez}} \rightarrow$ Zahl im Dezimalsystem



Dezimalsystem (4)

- Aus welchen Ziffern besteht eine Zahl?
 - Fortlaufend mit Zehn dividieren
 - Den Rest der Division notieren
 - Aufhören, wenn Null erreicht ist
 - Die Reste von unten nach oben ablesen

Dezimalsystem (5)

- Aus welchen Ziffer besteht die Zahl 2012?

–	$2012 \div 10$	$= 201$	Rest 2		Lese- richtung
–	$201 \div 10$	$= 20$	Rest 1		
–	$20 \div 10$	$= 2$	Rest 0		
–	$2 \div 10$	$= 0$	Rest 2		

Rechnung endet hier

- Das Ergebnis lautet: 2012_{dez}
- Wir kennen das Ergebnis ohne Berechnung
 - Das Dezimalsystem ist uns vertraut

Dezimalsystem (6)

- Gegeben sei eine feste Zahl von Ziffern
 - Wie viele Zahlen gibt es insgesamt?
 - Zehn hoch der Anzahl der Ziffern
 - Welches ist die größte Zahl?
 - Bei allen Stellen die höchste Ziffer schreiben
 - Anzahl der Stellen minus eins
- Gegeben seien vier Ziffern
 - Anzahl der Zahlen: $10^4 = 10000$ (0 ... 9999)
 - Größte Zahl: 9999 oder $10000-1 = 9999$

An alle Stellen die höchste Ziffer

Anzahl der Zahlen minus eins

Hexadezimalsystem (1)

- Das Hexadezimalsystem besitzt 16 Ziffern
– 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F
- Die Buchstaben stehen für die Werte

A	B	C	D	E	F
10	11	12	13	14	15

- Der Wert der Stelle kann berechnet werden

Stelle	3	2	1	0
Wert	16^3	16^2	16^1	16^0

Hexadezimalsystem (2)

- Welchen Wert hat die Ziffernfolge 2012_{hex} ?
 - $2012_{\text{hex}} = 2 \cdot 16^3 + 0 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0$
 - $2012_{\text{hex}} = 2 \cdot 4096 + 0 \cdot 256 + 1 \cdot 16 + 2 \cdot 1$
 - $2012_{\text{hex}} = 8210$
- Das Hexadezimalsystem ist uns fremd
- Den Wert müssen wir tatsächlich berechnen
- $2012_{\text{hex}} \rightarrow$ Zahl im Hexadezimalsystem



Hexadezimalsystem (3)

- Aus welchen Ziffern besteht die Zahl 2012?
 - $2012 \div 16 = 125$ Rest 12 (C)
 - $125 \div 16 = 7$ Rest 13 (D)
 - $7 \div 16 = 0$ Rest 7
- Das Ergebnis lautet: $7DC_{\text{hex}}$
- Die Ziffern mussten wir berechnen
 - Das Hexadezimalsystem ist uns fremd



Rechnung endet hier

Hexadezimalsystem (4)

- Gegeben seien vier Hexadezimalziffern
 - Wie viele Zahlen gibt es insgesamt?
 - $16^4 = 65536$
 - Welches ist die größte Zahl?
 - $FFFF_{\text{hex}}$  An alle Stellen die höchste Ziffer
 - 65535  Anzahl der Zahlen minus eins

Hexadezimalsystem (5)

- Zusammenfassung
 - Von der Schreibweise zum Wert
 - $7DC_{\text{hex}} \rightarrow 2012$ Hexadezimale Schreibweise $\rightarrow$ dezimaler Wert
 - Multiplikation mit dem Stellenwert
 - Vom Wert zur Schreibweise
 - $2012 \rightarrow 7DC_{\text{hex}}$ Dezimaler Wert $\rightarrow$ hexadezimale Schreibweise
 - Division mit der Basis

Binärsystem (1)

- Das Binärsystem besitzt 2 Ziffern
 - 0, 1
- Welchen Wert hat die Ziffernfolge 1011_{bin} ?
 - $1011_{\text{bin}} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
 - $1011_{\text{bin}} = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$
 - $1011_{\text{bin}} = 11$

Binärsystem (2)

- Aus welchen Ziffern besteht die Zahl 11?

– $11 \div 2 = 5$ Rest 1

– $5 \div 2 = 2$ Rest 1

– $2 \div 2 = 1$ Rest 0

– $1 \div 2 = 0$ Rest 1

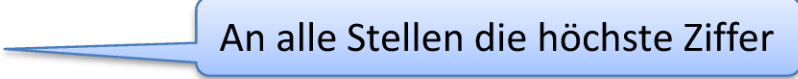


Lese-
richtung

Rechnung endet hier

- Das Ergebnis lautet: 1011_{bin}

Binärsystem (3)

- Gegeben seien vier Binärziffern
 - Wie viele Zahlen gibt es insgesamt?
 - $2^4 = 16$
 - Welches ist die größte Zahl?
 - 1111_{bin} 
 - 15 
 - Übliche Bezeichnungen
 - Eine Binärziffer = 1 Bit
 - Acht Binärziffern = 1 Byte

Zahlensysteme (3)

- Zahlensysteme sind universell
 - Sie funktionieren mit jeder Anzahl von Ziffern
- Beispiele
 - Oktalsystem
 - 8 Ziffern
 - Alte Schreibweise für Datenbytes
 - Base64
 - 64 Ziffern
 - Austausch von Binärdaten mit E-Mail

Zahlensysteme (4)

- Zahlensysteme sind aufwändig
 - Man muss viel rechnen
- Manchmal geht es auch einfacher
 - Binär $\rightarrow$ Dezimal
 - Dezimal $\rightarrow$ Binär
 - Binär $\rightarrow$ Hexadezimal
 - Hexadezimal $\rightarrow$ Binär

Schnellumwandlung (1)

- Binär zu Dezimal
 - Schreibe ... 8 4 2 1 über die Stellen
 - Starte von rechts mit einer Eins
 - Gehe schrittweise nach links und verdopple
 - Addiere alle Stellenwerte mit einer Eins

Schnellumwandlung (2)

- Welchen Wert hat 10110011_{bin} ?

128	64	32	16	8	4	2	1
1	0	1	1	0	0	1	1

$$- 128 + 32 + 16 + 2 + 1 = 179$$

- Der Wert von 10110011_{bin} ist 179

Schnellumwandlung (3)

- Dezimal zu Binär
 - Verdopple Eins bis sie größer ist als der Wert
 - Versuche die Hälfte davon zu subtrahieren
 - Notiere eine 1 falls dies möglich ist
 - Notiere eine 0 falls dies nicht möglich ist
 - Fahre fort bis die Eins wieder erreicht ist
 - Die notierten Ziffern sind die Binärzahl

Schnellumwandlung (4)

- Aus welchen Ziffern besteht 179?
 - Verdopple Eins bis sie größer ist als der Wert
 - 1 2 4 8 16 32 64 128 256.
 - Versuche die Hälfte davon zu subtrahieren

179	51	51	19	3	3	3	1
128	64	32	16	8	4	2	1
1	0	1	1	0	0	1	1

- 179 ist 10110011_{bin}

Schnellumwandlung (5)

- Binär $\leftrightarrow$ Hexadezimal
 - Erstelle eine Tabelle
 - Links stehen die Hexadezimalziffern
 - Rechts die entsprechende vierstellige Binärzahl

0	0000	4	0100	8	1000	C	1100
1	0001	5	0101	9	1001	D	1101
2	0010	6	0110	A	1010	E	1110
3	0011	7	0111	B	1011	F	1111

Schnellumwandlung (6)

- Hexadezimal $\rightarrow$ Binär
 - Ziffer für Ziffer umwandeln
 - Bitmuster aus der Tabelle entnehmen
- Welcher Binärzahl entspricht $A7_{\text{hex}}$ und BC_{hex} ?
 - $A7_{\text{hex}} \rightarrow 1010\ 0111_{\text{bin}}$
 - $BC_{\text{hex}} \rightarrow 1011\ 1100_{\text{bin}}$

Schnellumwandlung (7)

- Binär $\rightarrow$ Hexadezimal
 - Bilde von rechts beginnend Vierergruppen
 - Ergänze links Nullen, falls nötig
 - Schlage jede Bitgruppe in der Tabelle nach
- Was entspricht 110100_{bin} und 10111100_{bin} ?
 - $110100_{\text{bin}} \rightarrow 0011\ 0100_{\text{bin}} \rightarrow 34_{\text{hex}}$
 - $10111100_{\text{bin}} \rightarrow \underbrace{1011}_{\text{2. Gruppe}} \underbrace{1100}_{\text{1. Gruppe}}_{\text{bin}} \rightarrow \text{BC}_{\text{hex}}$

Zahlensysteme (5)

- Dezimal und binär passen nicht gut zusammen
 - Zehn ist keine Zweierpotenz
- Hexadezimal und binär passen gut zusammen
 - Sechzehn ist eine Zweierpotenz (2^4)
 - Vier Bit ergeben genau eine Hexadezimalziffer
 - Eine Hexadezimalziffer ergeben genau vier Bit
- Bitfolgen schreibt man meist hexadezimal
 - Als Bitfolgen wären sie viel zu lang

Zahlensysteme (6)

- Anwendung von Hexadezimalzahlen
 - Hex-Editor
 - Ein Hex-Editor stellt den Inhalt einer Datei als Folge von Hexadezimalzahlen dar
 - Der Inhalt der Datei kann geändert werden indem man die Hexadezimalzahlen ändert

89 50 4E 47 0D 0A 1A 0A 00 00 00 0D 49 48 44 52	%PNG.....IHDR
00 00 00 01 00 00 00 01 08 02 00 00 00 90 77 53	wS
DE 00 00 00 0E 49 44 41 54 78 DA 62 F8 CF CO 00	p....IDATxÚbøiÀ.
10 60 00 03 01 01 00 66 FD 9F 24 00 00 00 00 49	..`.....fÿŸ\$....I
45 4E 44 AE 42 60 82	END@B` ,

Zeichenkodierung (1)

- **ASCII** (American Standard Code for Information Interchange)

ASCII		Lower Hex Digit															
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Higher Hex Digit	0	NUL	SOH	STX	ETX	EOF	ENQ	ACK	BEL	BS	HT	LF	VT	FF	CR	SO	SI
	1	DLE	DC1	DC2	DC3	DC4	NAK	SYN	ETB	CAN	EM	SUB	ESC	FS	GS	RS	US
	2		!	"	#	\$	%	&	'	(	)	*	+	,	-	.	/
	3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>	?
	4	@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
	5	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[	\	]	^	_
	6	`	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
	7	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	{		}	~	DEL

Zeichenkodierung (2)

- Den Zeichen werden Bitmuster zugeordnet
 - Die Bitmuster werden hexadezimal angegeben
 - Der Code kann aus der Tabelle gelesen werden
 - Welchen Code besitzen \$ und n?
 - \$ → Zeile 2, Spalte 4 → $24_{\text{hex}} \rightarrow 0010\ 0100_{\text{bin}}$
 - n → Zeile 6, Spalte E → $6E_{\text{hex}} \rightarrow 0110\ 1110_{\text{bin}}$
- Higher Hex Digit

Lower Hex Digit
- VORSICHT: High und Low nicht vertauschen!