

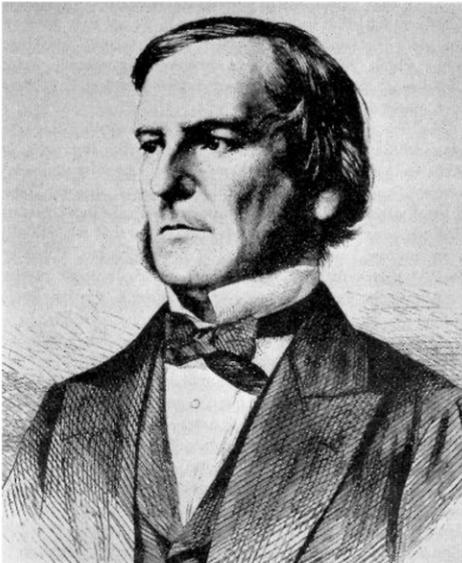
# Logische Operatoren

Digitaltechnik

Wolfgang Neff

# Boolesche Algebra (1)

- George Boole
  - Britischer Mathematiker und Philosoph
  - Mathematische Grundlagen der Informatik



- \* 2. Nov. 1815 in England
- † 8. Dez. 1864 in Irland

# Boolesche Algebra (2)

- Rechnen mit der Wahrheit

- Wahr (**true**)  $\rightarrow$  1

- Falsch (**false**)  $\rightarrow$  0

Etwas, was wahr und falsch sein kann.  
Rechnen mit der Wahrheit ist schwer.

$$1+1 = 2$$

$$0-1 = -1$$

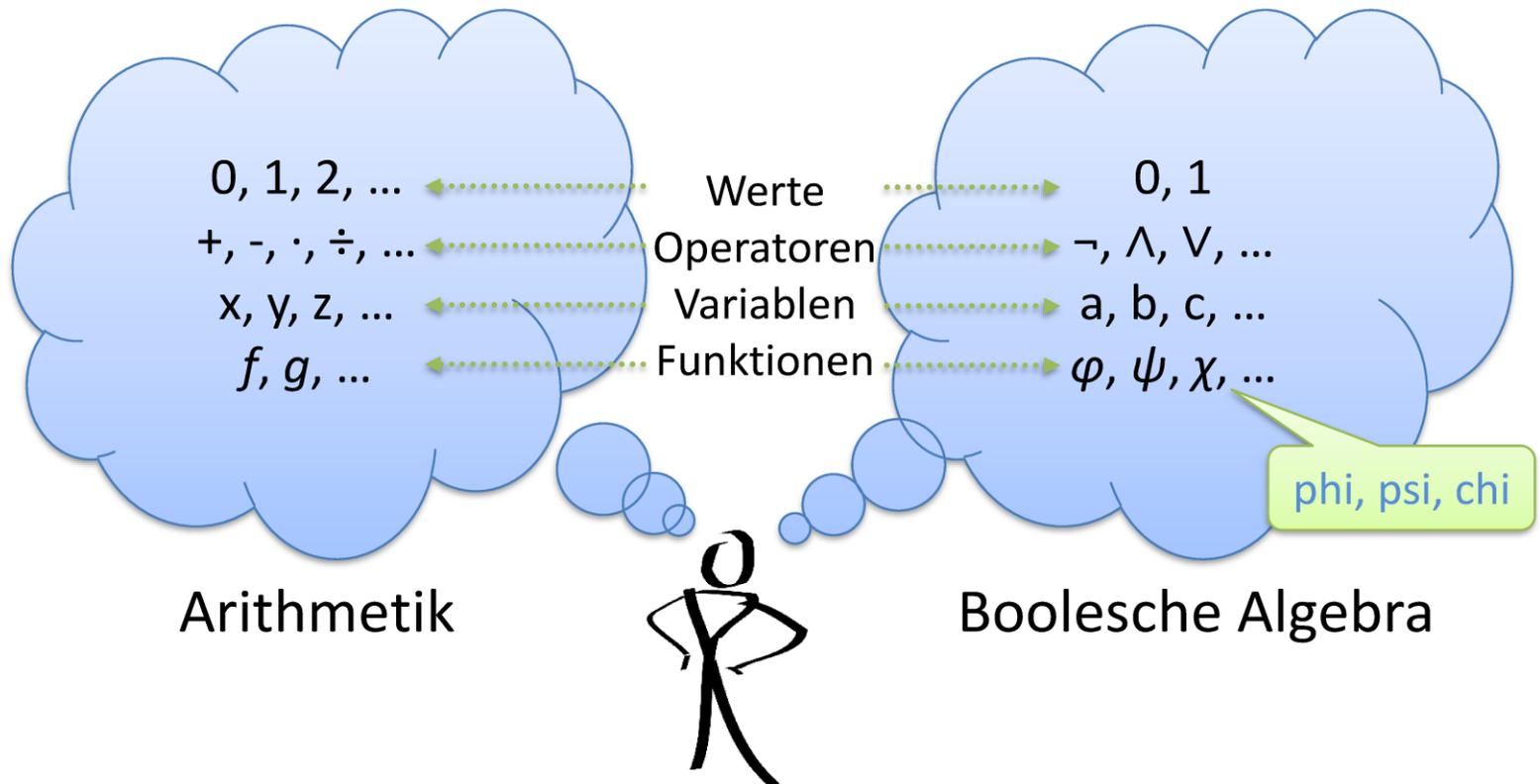
$$1 \div 0 = \perp$$



Eine neue Art  
von Mathematik  
wird nötig!

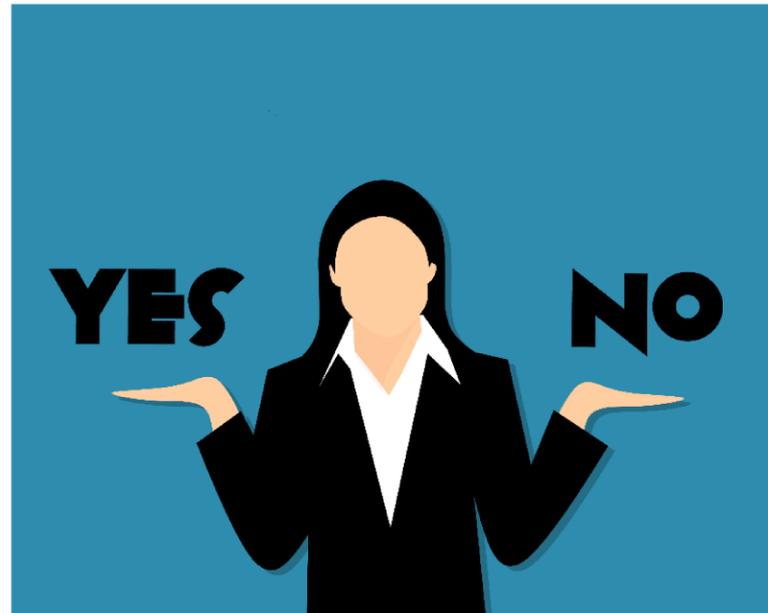
# Boolesche Algebra (3)

- Eine neue Art von Mathematik



# Logische Operatoren (1)

- Arbeiten mit logischen Werten
  - Wahr/Falsch, True/False, An/Aus, High/Low, 1/0
- Alternative Ausdrücke
  - Logischer Operator
    - Logische Verknüpfung
    - Boolescher Operator
  - Logischer Wert
    - Wahrheitswert
    - Boolescher Wert



# Logische Operatoren (2)

- Negation

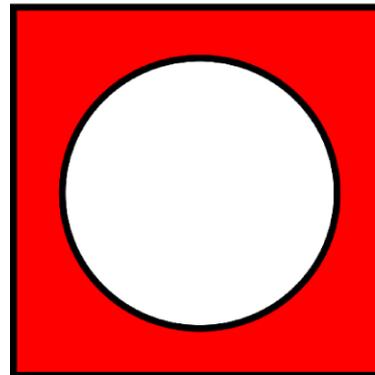
- Symbol:  $\neg$  (NICHT, NOT, manchmal  $\neg A \rightarrow \bar{A}$ )

- Bedeutung: Logisches Nicht (Gegenteil von ...)

- Definition:

- | a | $\neg a$ |
|---|----------|
| 0 | 1        |
| 1 | 0        |

Wahrheitstabelle



Venn-Diagramm

# Logische Operatoren (3)

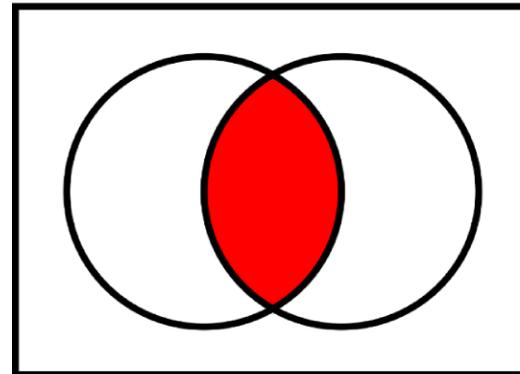
- Konjunktion

- Symbol:  $\wedge$  (UND, AND)

- Bedeutung: Logisches Und (beide sind wahr)

- Definition:

- | a | b | $a \wedge b$ |
|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0            |
| 0 | 1 | 0            |
| 1 | 0 | 0            |
| 1 | 1 | 1            |



# Logische Operatoren (4)

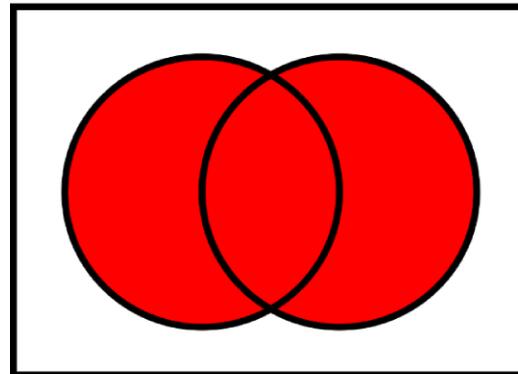
- Disjunktion

- Symbol:  $\vee$  (ODER, OR)

- Bedeutung: Logisches Oder (mindestens eines ist wahr)

- Definition:

- | a | b | $a \vee b$ |
|---|---|------------|
| 0 | 0 | 0          |
| 0 | 1 | 1          |
| 1 | 0 | 1          |
| 1 | 1 | 1          |



# Logische Operatoren (5)

- Antivalenz

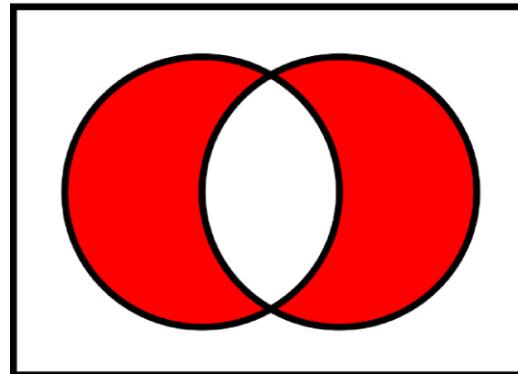
- Symbol:  $\oplus$  (XOR, auch  $\leftrightarrow$  oder  $\underline{\vee}$ )

Nicht äquivalent  
(nicht gleich)

- Bedeutung: Exklusives Oder (eines aber nicht beide ...)

- Definition:

- | a | b | $a \oplus b$ |
|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0            |
| 0 | 1 | 1            |
| 1 | 0 | 1            |
| 1 | 1 | 0            |



# Logische Operatoren (6)

- Exklusion (Sheffer-Strich)

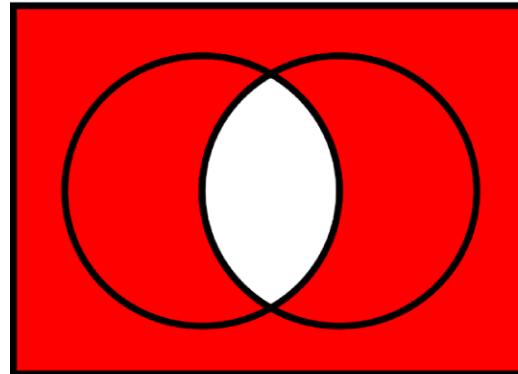
Es gibt keine Alternative

- Symbol:  $|$  (NAND, auch  $\uparrow$  oder  $\bar{\wedge}$ )

- Bedeutung: Negation von Und (mind. eines ist falsch)

- Definition:

- | a | b | a b |
|---|---|-----|
| 0 | 0 | 1   |
| 0 | 1 | 1   |
| 1 | 0 | 1   |
| 1 | 1 | 0   |



# Logical Operators (7)

- Nihilation (Peirce-Funktion)

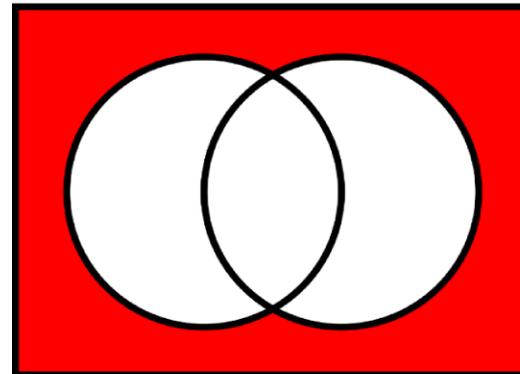
- Symbol:  $\downarrow$  (NOR, auch  $\bar{\vee}$ )

Nichts ist wahr

- Bedeutung: Negation von Oder (keines ist wahr)

- Definition:

- | a | b | $a \downarrow b$ |
|---|---|------------------|
| 0 | 0 | 1                |
| 0 | 1 | 0                |
| 1 | 0 | 0                |
| 1 | 1 | 0                |



# Gesetze der Logik (1)

- Doppelte Verneinung
  - Es ist nicht wahr, dass es nicht wahr ist
    - Es ist wahr
  - Als Formel ausgedrückt
    - $\neg(\neg a) \leftrightarrow a$
  - Beweis

a	$\neg a$	$\neg\neg a$
0	1	0
1	0	1



$$a \leftrightarrow \neg\neg a$$

# Gesetze der Logik (2)

- De Morgansche Gesetze
  - Verneinung von Klammern
    - Nicht (A und B) *entspricht* nicht A oder nicht B
    - Nicht (A oder B) *entspricht* nicht A und nicht B
  - Als Formel ausgedrückt
    - $\neg(a \wedge b) \leftrightarrow \neg a \vee \neg b$
    - $\neg(a \vee b) \leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$

# Gesetze der Logik (3)

- De Morgansche Gesetze (Fortsetzung)

- Beispiel

- Alle Zahlen, die nicht zwischen 1 und 5 liegen

–  $\neg(n \geq 1 \wedge n \leq 5) \rightarrow \neg(n \geq 1) \vee \neg(n \leq 5) \rightarrow n < 1 \vee n > 5 \rightarrow \dots, -1, 0, 6, 7, \dots$

–  $\neg(n \geq 1 \wedge n \leq 5) \rightarrow n \leq 1 \wedge n \geq 5 \rightarrow \emptyset \rightarrow$  Es gibt keine solchen Zahlen

Bitte gut merken!  
Es ist wichtig!



# NAND-Form

- Vollständige Sätze von logischen Operatoren
  - NICHT, UND, ODER (NOT, AND, OR)
  - NAND (oder NOR)
    - Nur ein Operator! (außerdem leicht in Silizium zu machen)
- Umwandlung
  - $\neg A \rightarrow A|A$
  - $A \wedge B \rightarrow (A|B)|(A|B)$
  - $A \vee B \rightarrow (A|A)|(B|B)$

