

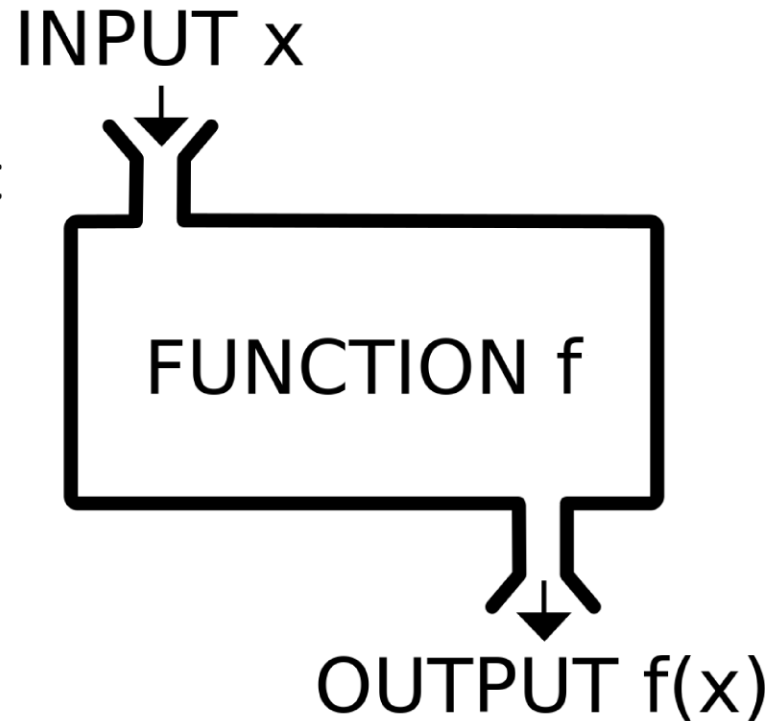
Wahrheitstabellen

Digitaltechnik

Wolfgang Neff

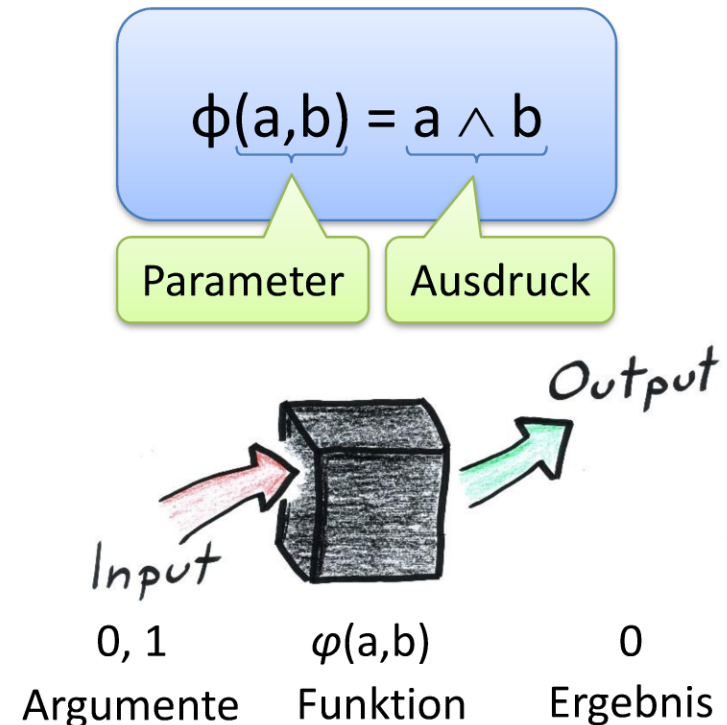
Wahrheitstabellen (1)

- Funktionen
 - Verarbeiten Input
 - Produzieren Output
 - Sie haben
 - Parameter
 - Input
 - Sie geben zurück
 - Ergebnisse
 - Output



Wahrheitstabellen (2)

- Wahrheitsfunktionen
 - Sind Ausdrücke aus
 - Parameter ($a, b, c, \dots$)
 - Operatoren ($\neg, \wedge, \vee, \dots$)
 - Funktionen ($\varphi, \psi, \chi, \dots$)
 - Weitere Bezeichnungen
 - Schaltfunktion
 - Logische Funktion
 - Boolesche Function



Wahrheitstabellen (3)

- Wahrheitsfunktionen (Fortsetzung)
 - Unterscheiden sich von Arithmetische Funktionen
 - Arithmetische Funktionen sind unendlich
 - Wahrheitsfunktionen sind endlich



$$f(1,1) = 2$$

$$f(1,2) = 3$$

$$f(1,3) = 4$$

$$f(1,4) = 5$$

...

Es ist kein Ende in Sicht

Arithmetische Funktion $f(x,y) = x+y$

$$\varphi(0,0) = 0$$

$$\varphi(0,1) = 0$$

$$\varphi(1,0) = 0$$

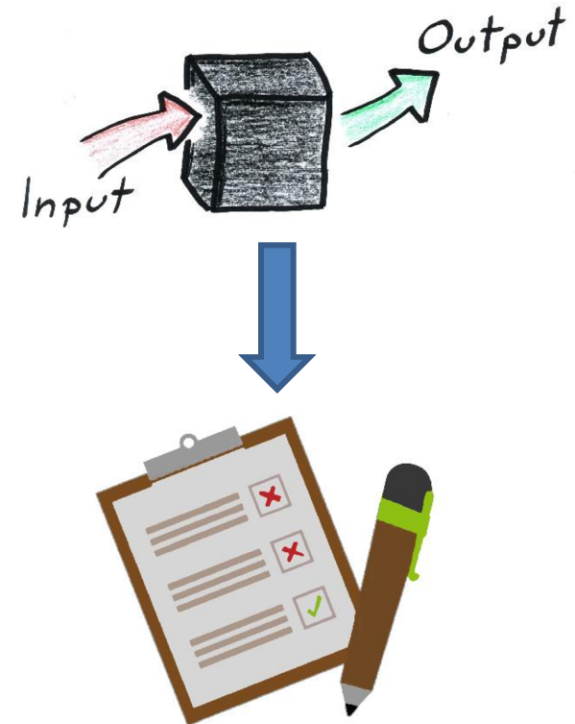
$$\varphi(1,1) = 1$$

Argumente komplett

Wahrheitsfunktion $\varphi(a,b) = a \wedge b$

Wahrheitstabellen (4)

- Wahrheitsfunktionen (Fortsetzung)
 - Tabellen können erstellt werden
 - Alle mögliche Inputs (Argumente)
 - Alle mögliche Outputs (Ergebnisse)
 - Bezeichnungen
 - Wahrheitstabelle
 - Schalttable
 - Zustandstabelle



Wahrheitstabellen (5)

- Wahrheitsfunktionen (Fortsetzung)

- Beispiel

- $\phi(a,b) = a \wedge b$



a	b	$\phi(a,b)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Beschreibung

- Zwei Parameter
 - a, b
- Vier Argumente
 - (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)
- Ein Ergebnis
 - 0 oder 1

Wahrheitstabellen (6)

- Beispiele
 - Funktionen mit einem Parameter: $\phi(a)$
 - Funktionen mit zwei Parameter: $\phi(a,b)$

a	$\phi(a)$
0	...
1	...

a	b	$\phi(a,b)$
0	0	...
0	1	...
1	0	...
1	1	...

Wahrheitstabellen (7)

- Erstellung
 - Anzahl der Spalten
 - Anzahl der Parameter: n
 - Plus Anzahl der Ergebnisse
 - Anzahl der Zeilen
 - Anzahl der Argumente: 2^n
 - Erste Spalte
 - Halbe-Halbe: $\frac{1}{2}$ Spalte 0, $\frac{1}{2}$ Spalte 1

Wahrheitstabellen (8)

- Erstellung (Fortsetzung)
 - Zweite Spalte
 - Halbe-halbe aber doppelt so schnell: $\frac{1}{4} 0, \frac{1}{4} 1, \frac{1}{4} 0, \frac{1}{4} 1$
 - Und so weiter ...
 - Checklist
 - Erste Zeile startet mit: 0 0 0 0 ...
 - Letzte Zeile endet mit : 1 1 1 1 ...
 - Letzte Spalte wechselt ständig: 0 1 0 1 0 1 ...
 - Folge der Zeile: Natürliche Zahlen (0 1 2 3 ...) in binär

Wahrheitstabellen (9)

- Funktion mit vier Parameter: $\phi(a,b,c,d)$

a	b	c	d		a	b	c	d
0	0	0	0	→	1	0	0	0
0	0	0	1		1	0	0	1
0	0	1	0		1	0	1	0
0	0	1	1		1	0	1	1
0	1	0	0		1	1	0	0
0	1	0	1		1	1	0	1
0	1	1	0		1	1	1	0
0	1	1	1		1	1	1	1

Fortsetzung rechts

Wahrheitstabellen (10)

- Logische Äquivalenz
 - Wahrheitstabellen sind gleich
 - $\phi \leftrightarrow \psi$

a	b	$\phi(a,b)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a	b	$\psi(a,b)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Wahrheitstabellen (11)

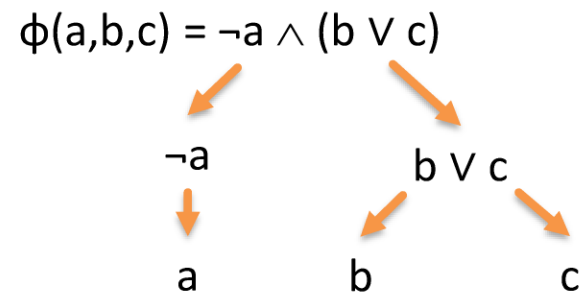
- Berechnung (erste Methode)
 - Mathematikermethode
 - Termweise



- Terme: bilden den Ausdruck einer Funktion
- Funktion: spannen einen Baum aus Termen auf

$$\phi(a,b,c) = \underbrace{\neg a}_{1. \text{ Term}} \wedge \underbrace{(b \vee c)}_{2. \text{ Term}}$$

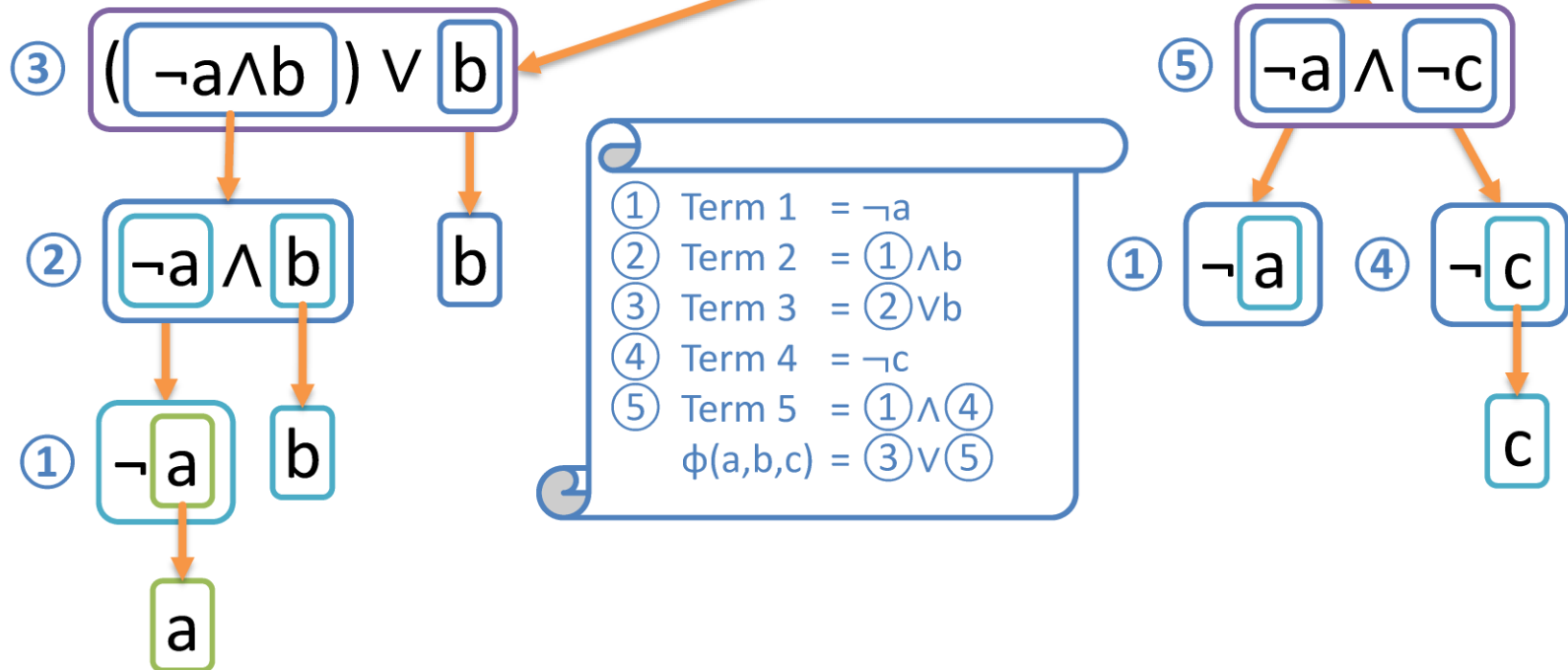
3. Term



Wahrheitstabellen (12)

- Berechnung** (erste Methode, Fortsetzung)

– Beispiel: $\phi(a,b,c) = ((\neg a \wedge b) \vee b) \vee (\neg a \wedge \neg c)$



Wahrheitstabellen (13)

- Berechnung (erste Methode, Fortsetzung)
 - Beispiel: $\phi(a,b,c) = ((\neg a \wedge b) \vee b) \vee (\neg a \wedge \neg c)$

			①	②	③	④	⑤	$\phi(a,b,c)$
a	b	c	$\neg a$	$\textcircled{1} \wedge b$	$\textcircled{2} \vee b$	$\neg c$	$\textcircled{1} \wedge \textcircled{4}$	$\textcircled{3} \vee \textcircled{5}$
0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

Wahrheitstabellen (14)

- Berechnung (zweite Methode)
 - Philosophenmethode
 - Jedes Symbol in eine Spalte
 - Füge die Argumente ein
 - Führe die Operationen aus
 - Fülle die Spalte mit den Ergebnissen
 - Die zuletzt berechnete Spalte zeigt das Ergebnis der Funktion.



a	b	a	$\rightarrow$	$\wedge$	$\leftarrow$	b
0	0	0		0		0
0	1	0		0		1
1	0	1		0		0
1	1	1		1		1

Wahrheitstabellen (15)

- Berechnung (zweite Methode, Fortsetzung)
 - Beispiel: $\phi(a,b,c) = ((\neg a \wedge b) \vee b) \vee (\neg a \wedge \neg c)$

Abfolge					2	1	4	3		6	5		12		8	7	11	10	9	
a	b	c	(	(	$\neg$	a	$\wedge$	b	)	$\vee$	b	)	$\vee$	(	$\neg$	a	$\wedge$	$\neg$	c	)
0	0	0			1	0	0	0		0	0		1		1	0	1	1	0	
0	0	1			1	0	0	0		0	0		0		1	0	0	0	1	
0	1	0			1	0	1	1		1	1		1		1	0	1	1	0	
0	1	1			1	0	1	1		1	1		1		1	0	0	0	1	
1	0	0			0	1	0	0		0	0		0		0	1	0	1	0	
1	0	1			0	1	0	0		0	0		0		0	1	0	0	1	
1	1	0			0	1	0	1		1	1		1		0	1	0	1	0	
1	1	1			0	1	0	1		1	1		1		0	1	0	0	1	

Wahrheitstabellen (16)

- Don't-Care-Werte
 - Wahrheitstabellen können unvollständig sein
 - Ihre Länge ist aber vorgegeben: 2^n
 - Unbenützte Zeilen erhalten Don't-Care-Einträge
 - Sie dürfen nicht einfach weg gelassen werden
 - Sie werden durch ein X markiert

Wahrheitstabellen (17)

- Don't-Care-Werte (Fortsetzung)
 - Beispiel: Welche Seite des Würfels hat 6 Augen?



n	a	b	c	$\phi(a,b,c)$	Seite
0	0	0	0	X	ungültig
1	0	0	1	0	
2	0	1	0	0	
3	0	1	1	0	
4	1	0	0	0	
5	1	0	1	0	
6	1	1	0	1	
7	1	1	1	X	ungültig

Wahrheitstabellen (18)

- Zusammenfassung
 - Wahrheitstabellen beschreiben log. Funktionen
 - Eine Funktion hat genau eine Wahrheitstabelle
 - Wahrheitstabellen sind nicht eindeutig
 - Viele Funktionen haben dieselbe Wahrheitstabelle
 - All diese Funktionen sind logisch äquivalent
 - Einige dieser Funktionen findet man sehr leicht
 - Wahrheitstabelle $\rightarrow$ Wahrheitsfunktion $\rightarrow$ Schaltung